第31卷 第2期
1992年3月

厦门大学学报(自然科学版)
Journal of Xiamen University (Natural Science)

Vol. 31 No. 2
Mar. 1992

关于非线性多层差分格式的Lax等价性定理[①]

陈传淡 林 群
(数学系) (计统系)

摘要 把双层差分格式的Lax等价性定理应用一些特殊技巧，推广为非线性初值问题差分方法中关于多层差分格式的Lax等价性定理.

关键词 差分逼近，非线性，相容性，收敛性，稳定性，等价性

1 适定的初值问题

设 B 为 Banach 空间，$t\in[0,T]$ 为时间参数，对于任何固定的 t，元素 $u(t,x)\in B$，其中 $x\in X$ 为空间变量，而 X 为实的或复的向量空间. 又设 $A:[0,T]\times X\times R\to B$ 为有界非线性算子，其中 $R\subset B$. 于是我们所讨论的 B 空间中的初值问题可写为如下形式

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=A(t,x,u(t,x)),\quad u(0,x)=u^0(x) \tag{1}$$

其中 $u^0(x)\in B$ 称为初始元素. 若有边界条件，则 R 仅限于 B 中满足边界条件的子类.

定义1 含参数元素 $u(t,x)\in B$ 称为(1)的解，如果 1) $\forall\, t\in[0,T]$ 有 $u(t,x)\in R$，2) $u(0,x)=u^0(x)$，3) $\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,\delta>0$，当 $\Delta t<\delta$ 时，对 $t\in[0,T]$ 一致地有

$$\left\|\frac{u(t+\Delta t,x)-u(t,x)}{\Delta t}-A(t,x,u(t,x))\right\|<\varepsilon$$

假定问题(1)的解 $u(t,x)$ 存在唯一并连续依赖于初始条件，则对 $u^0(x)\in D\subset B$，存在非线性映射 $E_0:D\to B$，使

$$u(t,x)=E_0(t,x,u^0(x))$$

E_0 称为解算子，而 D，B 分别为 E_0 的定义域和像域.

定义2 由解算子 E_0 所确定的初值问题(1)称为适定的，如果 1) E_0 的定义域在 B 中稠密，2) 存在常数 $W>0$，对于 $u^0(x),v^0(x)\in D$ 有

$$\|E_0(t,x,u^0(x))-E_0(t,x,v^0(x))\|\leqslant W\|u^0(x)-v^0(x)\|$$

对 $\forall\, t\in[0,T]$ 一致成立.

定义2中的条件1)表明，若 $u^0(x)\notin D$，则问题的解不存在，但由 D 在 B 中的稠密性知，存在一序列 $\{u_l^0(x)\}$ 使得 $\lim\limits_{l\to\infty}u_l^0(x)=u^0(x)$ ($u_l^0(x)\in D$)，而且关于这些新的初始元素 $u_l^0(x)$ 解存在，这样，解序列的极限元素便定义为原问题的解. 于是保证了解在广义下的存在性. 条件2)表明，解算子 E_0 关于初始元素的连续依赖性. 即当初始元素充分接近时，问题(1)的解也充分接近，这保证了解的唯一性. 我们此后总假定了(1)的解在上述意义下的适定性.

定理1(扩张定理) 对 B 空间中适定问题(1)的解算子 E_0，存在唯一的非线性扩张算子 E，其定义域为整个 B 空间.

---

① 1989-10-05 收到

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

证　这由 B 的完备性及 D 在 B 中处处稠密性即可得到.

这样,$\forall$ $u^0(x)\in B$,映射 $E:B\to B$:

$$u(x,t)=E(t,x,u^0(x))=\lim_{u^n\to u^0}E_0(t,x,u^n(x))$$

给出了问题(1)的广义解 $u(t,x)\in B$,而 E 称为广义解算子.

定理 2　广义解算子 E 具有下列性质:

1)半群性:$\forall$ $t_1,t_2\in[0,T]$且 $t_1\leqslant t_2$,有

$$E(t_2,x,u^0(x))=E(t_2,x,E(t_1,x,u^0(x))),u^0(x)\in B \tag{2}$$

2)t-连续性:若 A 为有界算子,则对固定的 $u^0(x)\in B$,有

$$\lim_{\Delta t\to 0}\|E(t+\Delta t,x,u^0(x))-E(t,x,u^0(x))\|=0 \tag{3}$$

对$\forall$ $t\in[0,T]$一致成立.

3)u^0-连续性:设算子 A 有界,则存在常数 $W>0$,当 $u^0(x),v^0(x)\in B$ 时有

$$\|E(t,x,u^0(x))-E(t,x,v^0(x))\|\leqslant W\|u^0(x)-v^0(x)\| \tag{4}$$

对$\forall$ $t\in[0,T]$一致成立.

在适定的初值问题中可证明,解算子 $E_0(t,x,u^0(x))$满足上述性质 1),2)[2],因此适定解算子 E_0 必满足上述三性质.由此推得,广义解算子 E 也满足上述三性质.因篇幅关系,证明从略.

2　有限差分逼近

令 $G=\{(t,x)|t\in[0,T],x\in X\}$,时间 t 的改变量为 Δt,$m(\Delta t)$是 t 关于 Δt 的一个划分.设 X 的维数为 k,在 $m(\Delta t)$的每个时间层 t_n 上给定空间格点集 $N_n=\{(t_n,x_L)|t_n=n\Delta t\in[0,T],x_L=(L_1\Delta x_1,\cdots,L_k\Delta x_k)\in X\}$,其中 $\Delta x_p=g_p(\Delta t)(p=1,\cdots,k)$为空间格距.于是 $N=\underset{n}{U}N_n(t_n\in[0,T])$便构成了 G 中的空间网格.

设 N_n 层上的差分解为 $u^n\in B$,则非线性有限差分方程在 N_{m-1}层上可写为如下一般形式

$$u^{m-1}=C_m(t_{m-1},x,\Delta t,\Delta x_1,\cdots,\Delta x_k;u^{m-2},\cdots,u^0) \tag{5}$$

其中 m 为差分方程的层数.在 N_{n+1}层上差分方程写为如下形式

$$u^{n+1}=C_m(t_{n+1},x,\Delta t,\Delta x_1,\cdots,\Delta x_k;u^n,\cdots,u^{n-m+2}) \tag{6}$$

下面讨论差分格式的相容性,收敛性及稳定性的概念.对于多层差分格式,我们引入差分算子族$\{C_m^j\}(j\geqslant 1)$,用

$$C_m^j(t_{n+j},u^n,\cdots,u^{n-m+2})$$

表示对 $u^n,\cdots,u^{n-m+2}$使用 j 次算子 C_m 后,得到的 t_{n+j}层上的差分解 u^{n+j}.特别记 $C_m=C_m^1$,则有关概念可叙述如下:

定义 3(相容性)　算子 C_m 称为初值问题(1)的相容逼近,如果$\forall$ $\varepsilon>0$,$\exists$ $\delta>0$,使得(1)的解 $u(t,x),\cdots,u(t-(m-2)\Delta t,x)$当 $\Delta t<\delta$ 时满足

$$\|C_m(t+\Delta t,u(t,x),\cdots,u(t-(m-2)\Delta t,x))-E(t+\Delta t,x,u(t,x))\|\leqslant\varepsilon\Delta t \tag{7}$$

在 $t\in[0,T]$中一致成立.

定义 4(收敛性)　算子族$\{C_m^j\}$称为初值问题(1)的收敛逼近.如果$\forall$ $\varepsilon>0$,$\exists$ $\delta>0$,$\eta>0$ 及正整数 N,使得对 $u^{m-2},\cdots,u^0\in B$,当 $\|u^i-u^0(x)\|<\delta,(i=0,\cdots,m-2,u^0=u^0(x))$及 $n>N$ 时,有

$$\|C_m^{n-m+2}(t_n,u^{m-2},\cdots,u^0)-E(t,x,u^0(x))\|<\varepsilon \tag{8}$$

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

其中 $t\in[0,T]$，当 $n\to\infty$ 时 $\Delta t\to0$，且 $t_n=n\Delta t\to t$.

定义 5(稳定性)　算子族 $\{C_m^n\}$ 称为关于初始元素稳定，如果存在常数 $K>0,\delta>0$，对于二组初始元素 $u^{m-2},\cdots,u^0;v^{m-2},\cdots,v^0\in B$ 当 $\Delta t<\delta$ 时，满足关系

$$\| C_m^{n-m+2}(t_n,u^{m-2},\cdots,u^0)-C_m^{n-m+2}(t_n,v^{m-2},\cdots,v^0)\| \leqslant K\sum_{i=0}^{m-2}\| u^i-v^i\| \tag{9}$$

其中 $t_n=n\Delta t\leqslant t\in[0,T]$.

3　等价性定理

定理 3(等价性定理)　给定适定的初值问题(1)及其多层有限差分逼近(6)，若此差分逼近是相容的，则关于初始元素的稳定性是收敛性的充要条件.

证　首先由收敛性推出稳定性. 任给 $\varepsilon>0$，因为差分逼近收敛，故必存在 $\delta_1>0,\eta>0$ 及正整数 N，使得对二组初始元素 $u^{m-2},\cdots,u^0;v^{m-2},\cdots,v^0\in B$，其中 $u^0=u^0(x),v^0=v^0(x)$，当 $n>N$ 及 $\| u^i-u^0(x)\|<\delta_1$，$\| v^i-v^0(x)\|<\delta_1(i=0,\cdots,m-2)\Delta t<\delta_1$ 时，由(8)及下式中间插入两项 $E(t,x,u^0(x)),E(t,x,v^0(x))$ 并取 t 满足 $|t_n-t|<\eta$ 得

$$\begin{aligned}&\| C_m^{n-m+2}(t_n,u^{m-2},\cdots,u^0)-C_m^{n-m+2}(t_n,v^{m-2},\cdots,v^0)\|\\&\quad\leqslant 2\varepsilon+\| E(t,x,u^0(x))-E(t,x,v^0(x))\|\end{aligned} \tag{10}$$

依 E 算子的 u^0-连续性(4)，对于 $u^0(x),v^0(x)\in B$，满足关系

$$\| E(t,x,u^0(x))-E(t,x,v^0(x))\| \leqslant K\| u^0(x)-v^0(x)\| \tag{11}$$

由(10)及(11)得，当 $n>N$，$\| u^i-u^0\|<\delta_1$，$\| v^i-v^0\|<\delta_1$，$\Delta t<\delta_1$，及 $\varepsilon\to0$，再适当增大常数 K 使

$$\begin{aligned}&\| C_m^{n-m+2}(t_n,u^{m-2},\cdots,u^0)-C_m^{n-m+2}(t_n,v^{m-2},\cdots,v^0)\|\\&\quad\leqslant K\| u^0-v^0\| \leqslant K\sum_{i=0}^{m-2}\| u^i-v^i\|\end{aligned}$$

对任意 t_n 成立. 再由(9)即得关于初始元素的稳定性.

其次由稳定性推出收敛性. 设 $u(t_{m-2},x),\cdots,u^0(x)\in B$，令

$$\varphi_n=C_m^{n-m+2}(t_n,u(t_{m-2},x),\cdots,u^0(x))-E(t_n,x,u^0(x))$$

我们补入 $n-m+2$ 项，得

$$\begin{aligned}\varphi_n=\sum_{j=m-1}^{n-1}&[C_m^{n-j}(t_n,c_m(t_j,u(t_{j-1}x),\cdots u(t_{j-m+1}x)),u(t_{j-1}x),\cdots,u(t_{j-m+2}x))\\&-C_m^{n-j}(t_n,E(t_j,x,u(t_{j-1}x)),u(t_{j-1}x),\cdots,u(t_{j-m+2}x))]\\&+[C_m(t_n,u(t_{n-1}x)\cdots,u(t_{n-m+1}x))-E(t_nx,u(t_{n-1}x))]\end{aligned} \tag{12}$$

由算子 C_m 及 E 的定义，以及 E 的半群性(2)知，在式(12)前一方括号中的第二项恰为后一方括号中的第一项，且第一方括号中的第一项和最后一个方括号中的第二项分别是原 φ_n 中的第一项和第二项. 下面对式(12)的每一个方括号应用相容性及稳定性条件.

任给充分小 $\varepsilon>0$，对式(12)最后一个方括号，由于相容性式(7)满足，故对 $\varepsilon>0$，$\exists\ \delta_1>0$，当 $\Delta t<\delta_1$ 时，有

$$\| C_m(t_n,u(t_{n-1},x)\cdots,u(t_{n-m+1},x))-E(t_n,x,u(t_{n-1},x))\| \leqslant\frac{1}{3T}\varepsilon\Delta t \tag{13}$$

对式(12)前面的第 j 个方括号，因相容性定义(7)成立，故存在常数 $K>0$，对于 $\frac{\varepsilon\Delta t}{3KT}$，存在 δ_2 使 $\Delta t<\delta_2$ 时有

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\| C_m(t_j, u(t_{j-1}, x), \cdots, u(t_{j-m+1}, x)) - E(t_j, x, u(t_{j-1} x)) \| \leqslant \frac{\varepsilon \Delta t}{3KT}$$

$$(j = n-1, \cdots, m-1) \tag{14}$$

再由稳定性定义(9)及上式得(注意,这时下式的后 n 个初值恰好相同):

$$\| C_m^{n-j}(t_n, C_m(t_j, u(t_{j-1}, x), \cdots, u(t_{j-m+1}, x)), u(t_{j-1}, x), \cdots, u(t_{j-m+2}, x)) -$$
$$- C_m^{n-j}(t_n, E(t_j, x, u(t_{j-1}, x)), u(t_{j-1}, x), \cdots, u(t_{j-m+2}, x)) \| \leqslant \frac{1}{3T} \varepsilon \Delta t$$

$$(j = m-1, \cdots, n-1) \tag{15}$$

综上,取 $\delta_3 = \min(\delta_1, \delta_2)$,当 $\Delta t < \delta_3$ 时,将(13),(15)应用于(12)可得

$$\| \varphi_n \| \leqslant (n - m + 2) \frac{1}{3T} \varepsilon \Delta t < \frac{\varepsilon}{3} \tag{16}$$

利用(16),我们可证明收敛性(8)成立,其步骤为

1) 由稳定性条件(9),当

$$\| u^i - u(t_i, x) \| \leqslant \frac{\varepsilon}{3K(m-1)}, \quad (i = 0, \cdots, m-2) \tag{17}$$

时,得

$$\| C_m^{n-m+2}(t_n, u^{m-2}, \cdots, u^0) - C_m^{n-m+2}(t_n, u(t_{m-2}, x), \cdots, u^0(x)) \|$$
$$\leqslant K \sum_{i=0}^{m-2} \| u^i - u(t_i, x) \| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \tag{18}$$

2) 再依算子 E 的 t-连续性(3),可知∃ $\eta > 0$,当 $|t_n - \hat{t}| < \eta$ 时

$$\| E(t_n, x, u^0(x)) - E(t, x, u^0(x)) \| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{19}$$

故对于任 $\varepsilon > 0$,可得 $\delta > 0$,其中 $\delta = \min(\delta_3, \delta')$,而 δ' 是由下列所决定的

$$\| u^i - u^0 \| \leqslant \| u^i - u(t_i, x) \| + \| u(t_i, x) - u^0 \|$$
$$\leqslant \| u^i - u(t_i, x) \| + \sum_{j=1}^{i} \| E(t_j, x, u^0) - E(t_{j-1}, x, u^0) \| \qquad (i = 0, \cdots, m-2)$$

故得

$$\| u^i - u^0 \| \leqslant \varepsilon / 3K(m-1) + m\varepsilon' = \delta' \tag{20}$$

总之,存在正整数 N 及 δ, η,使得当 $n > N$,$\Delta t < \delta$ 及 $|t_n - t| < \eta$,还有

$$\| u^i - u(t_i, x) \| \leqslant \varepsilon / 3K(m-1), \quad \| u^i - u^0 \| \leqslant \delta \tag{21}$$

满足时,由(16),(18),(19)可得下列估计

$$\| C_m^{n-m+2}(t_n, u^{m-2}, \cdots, u^0) - E(t, x, u^0(x)) \|$$
$$\leqslant \| C_m^{n-m+2}(t_n, u^{m-2}, \cdots, u^0) - C_m^{n-m+2}(t_n, u(t_{m-2}, x), \cdots, u^0(x)) \|$$
$$+ \| C_m^{n-m+2}(t_n, u(t_{m-2}, x) \cdots, u^0(x)) - E(t_n, x, u^0(x)) \|$$
$$+ \| E(t_n, x, u^0(x)) - E(t, x, u^0(x)) \| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

这就证明了收敛性式(8)成立,定理证毕.

参 考 文 献

1 陈传淼. 大连理工大学学报,1989,29:259~264

2 Richtmyer R D et al. *Difference Methods for Initialvalue Problems*, 2ed., Interscience Publishers,

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

1967
3 Ansorge R. *Numer. Math.*, 1966, 5: 178~185
4 Ansorge R. *Topics in Numerical Analysis* Ⅳ, 1977: 1~16
5 Palencia C et al. *Numer. Math.*, 1984, 44: 279~283
6 Palencia C et al. *Math. Comp.*, 1985, 45: 143~152

Equivalence Theorem of Nonlinear Multilevel Difference Methods for Initial Value Problems

Chen Chuandan　(*Dept. of Math.*)
Lin Qun　(*Dept. of Stat.*)

Abstract In this paper, the conceptions of consistency, convergemce and stability, the *Lax's equivalence theorem to the nonlinear multilevel difference approximation are given.*

Equivalence theorem If a nonlinear initialvalue problem is properly posed and a nonlinear multilevel finitedifference approximation satisfies the consistency conditions, then stability is necessary and sufficient for convergence.

Key words Difference approximation, Nonlinear, Consistency, Convergence, Stability, Equivalence

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net